

تصحيح امتحان مادة الاهتزازات ١

3 كر

المترين ١١:

١) عدد درجات الحرية ٢ $N = x, y, \theta$, $d = N - r$

$$r = 2 \text{ , } d = 3 - 2 = 1 \quad (0,25)$$

نوع الاهتزازات : اهتزازات حرة غير متخمدة (0,25)

١٢) عبارة الطاقة الحركية ٢ $E_c = \bar{E}_c + \bar{E}_c$
 انشعابية دورانية

$$\bar{E}_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}^2 \text{ , } x = 2R\theta \text{ , } y = R\theta \quad (0,25)$$

$$\bar{E}_c = \frac{1}{2} m (2R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} M (R\dot{\theta})^2 = (2m + M/2) R^2 \dot{\theta}^2 \quad (0,25)$$

$$\bar{E}_c = \frac{1}{2} J_{(O)} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} M R^2 \right) \dot{\theta}^2 = \left\{ \frac{1}{4} M R^2 \dot{\theta}^2 \right\} \quad (0,25)$$

١٣) عبارة الطاقة الكامنة ٢

$$E_p = \frac{1}{2} k y^2 = \frac{1}{2} k (R\theta)^2 = \left\{ \frac{1}{2} k R^2 \theta^2 \right\} \quad (0,25)$$

١٤) المعامل الفاعلية ٢ : طريق براغرانج ، $L = T - U$

$$L = (2m + M/2) R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} M R^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k R^2 \theta^2 \quad (0,25)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow 2(2m + M/2) R^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{2} M R^2 \ddot{\theta} + k R^2 \theta = 0$$

$$(4m + M) R^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{2} M R^2 \ddot{\theta} + k R^2 \theta = 0$$

$$I \ddot{\theta} (4m + M + \frac{M}{2}) + k \theta = 0$$

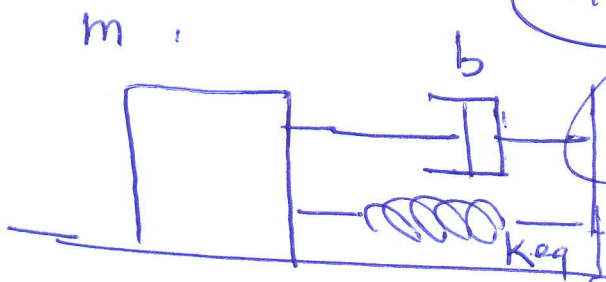
$$\ddot{\theta} + \frac{k}{4m + \frac{3M}{2}} \theta = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{4m + \frac{3M}{2}}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{8m + 3M}{2k}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{8m + 3M}}$$

التردد ω_0



$$L = T - U$$

$$k_{eq} = \frac{k}{2} + \frac{k}{2} = k, \quad U = \frac{1}{2} k_{eq} x^2 = \frac{1}{2} k x^2$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -b \dot{x}$$

$$m \ddot{x} + k x = -b \dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\delta = \frac{b}{2m} = 5 s^{-1}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 4.47 rad/s$$

نوع الاهتزاز: $\delta < \omega_0$ (underdamped)

13 حل المسألة من الشكل 2

$$x(t) = \frac{V_0}{2\omega} e^{-\delta t} \left(e^{+\omega t} - e^{-\omega t} \right)$$

0,25

حيث $\omega = \sqrt{\delta^2 - \omega^2} = 2,23 \text{ rad/s}$

0,25

زمن التوقف

زمن التوقف؟ عند التوقف $v = 0$

$\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) = \frac{V}{2\omega} \left[(\omega - \delta) e^{(\omega - \delta)t} - e^{-(\omega + \delta)t} \right] = 0$$

$$t = \frac{1}{2\omega} \ln \left(\frac{\delta + \omega}{\delta - \omega} \right) = 0,21 \text{ s}$$

0,25

بالعوض في $x(t)$ نجد التعليل

$$x = 0,76 \text{ m}$$

0,25

3

1. المعادلة التفاضلية 2 $\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ 0,25

وهي من الشكل 2 $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$\delta = \frac{b}{2m} = \frac{1000}{2(80)} = 6,25 \text{ s}^{-1}$ 0,25

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 10^4}{80}} = 25 \text{ rad/s}$ 0,25

نستج ان النظام مخيف 0,25

معادلتها من الشكل 2 $x(t) = C e^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \varphi)$ 0,25

$C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\delta x_0 + v_0}{\omega_a}\right)^2} = 0,5 \text{ m}$ 0,25
 $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 25,76 \text{ rad/s}$ 0,25

$x_0 = 8 \text{ cm}, v_0 = 0, \omega_0 = 25 \text{ rad/s}$

$\varphi = \arctan\left(-\frac{\delta x_0 + v_0}{\omega_a x_0}\right) = -0,25 \text{ rad}$ 0,25

$x(t) = 0,5 e^{-6,25t} \cos(25,76t - 0,25)$ 0,25

زمن الوصول إلى نهاية (الأكسار) $t = \frac{AB}{v} = \frac{15}{5} = 3 \text{ s}$ 0,25

$x(t=3 \text{ s}) = -0,45 \text{ m}$ 0,25